Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

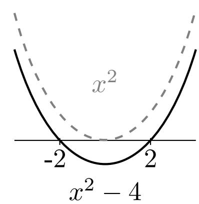
Matemáticas I (MA1111)
Ene-Mar 2024
1^{er} Examen Parcial (30 %)

Solución

Pregunta 1. (8 ptos.) Halle todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{\left|x^2-4\right|}{x} \leq 3$$

Solución: Trasladando verticalmente el gráfico de la función x^2, observamos que



$$\begin{aligned}\left|x^2-4\right| &= \left|(x-2)(x+2)\right| \\ &= \begin{cases} x^2-4 & \text{, si } x \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty) \\ 4-x^2 & \text{, si } x \in (-2,2) \end{cases}\end{aligned}$$

Luego, si $x \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\left|x^2-4\right|}{x} \leq 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-4}{x} \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-4}{x} - 3 \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-4-3x}{x} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x-4)}{x} \leq 0\end{aligned}$$

por lo que el análisis de signos

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,4)$	$(4,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$

establece que todos los valores pertenecientes al conjunto

$$\Big((-\infty,-2] \cup [2,\infty)\Big) \cap \Big((-\infty,-1] \cup (0,4]\Big) = (-\infty,-2] \cup [2,4]$$

satisfacen la inecuación.

Por otra parte, si $x \in (-2,2)$ se tiene que

$$\frac{\left|x^2-4\right|}{x} \leq 3 \iff \frac{4-x^2}{x} \leq 3 \iff 0 \leq 3 - \frac{4-x^2}{x}$$
$$\iff 0 \leq \frac{3x-4+x^2}{x} \iff 0 \leq \frac{(x+4)(x-1)}{x}$$

por lo que el análisis de signos

	$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$

establece que todos los valores pertenecientes al conjunto

$$(-2,2) \cap \Big([-4,0) \cup [1,\infty)\Big) = (-2,0) \cup [1,2)$$

satisfacen la inecuación.

Finalmente, la solución viene dada por

$$\frac{\left|x^2-4\right|}{x} \leq 3 \iff x \in \underbrace{\Big((-\infty,-2] \cup [2,4]\Big) \cup \Big((-2,0) \cup [1,2)\Big)}_{=(-\infty,0)\cup[1,4]}$$

Pregunta 2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{4-(x-1)^2} & \text{, si } x \in [1,3] \\ \frac{1}{2}x+1 & \text{, si } x \in (-\infty,-2] \cup [6,\infty) \end{cases}$$

a) **(3 ptos.)** Haga el gráfico de la función f.
(Ayuda: si $y = 1+\sqrt{4-(x-1)^2}$, calcule $(y-1)^2+(x-1)^2$)

b) Demuestre que f es inyectiva comprobando que:

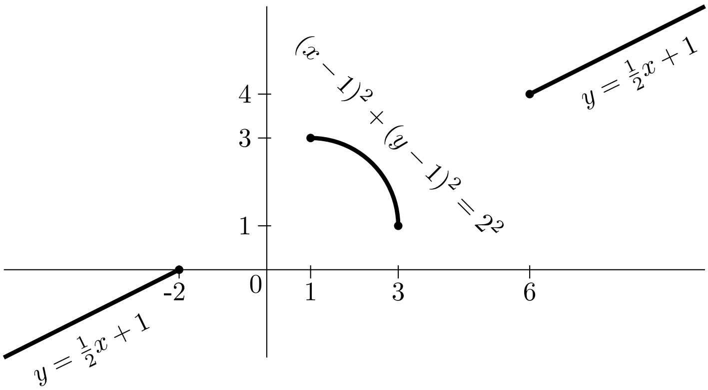
- **(1 pto.)** La función $p(x) = \frac{1}{2}x+1$ es inyectiva;
- **(2 ptos.)** La función $h(x) = 1+\sqrt{4-(x-1)^2}$ definida sólo para $x \in [1,3]$ es inyectiva;
- **(1 ptos.)** Si $x \in (-\infty,-2] \cup [6,\infty)$ entonces $p(x)$ no pertenece al rango de la función h.

c) **(3 ptos.)** Halle la expresión de la función inversa f^{-1}.

d) **(2 ptos.)** Dada la función $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, determine el dominio y el rango de la función compuesta $f \circ g$.

e) **(4 ptos.)** Dada la función $r(x) = 1 + \sqrt{11x+3}$, halle $\big(f \circ r\big)(x)$.

Solución: A continuación se muestra el gráfico de la función f.



La función $p(x) = \frac{1}{2}x + 1$ es inyectiva ya que

$$p(x_1) = p(x_2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}x_1 + 1 = \frac{1}{2}x_2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

La función $h(x) = 1 + \sqrt{4-(x-1)^2}$ definida sólo para $x \in [1,3]$ es inyectiva ya que

$$\begin{aligned}
h(x_1) = h(x_2) \;&\Longrightarrow\; 1 + \sqrt{4-(x_1-1)^2} = 1 + \sqrt{4-(x_2-1)^2} \\
&\Longrightarrow\; (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \\
&\Longrightarrow\; \sqrt{(x_1-1)^2} = \sqrt{(x_2-1)^2} \\
&\Longrightarrow\; \big|x_1-1\big| = \big|x_2-1\big| \\
&\Longrightarrow\; x_1 - 1 = x_2 - 1 \quad \text{pues } \; x_1, x_2 \in [1,3] \\
&\Longrightarrow\; x_1 = x_2
\end{aligned}$$

Lo último que falta para demostrar que la función f es inyectiva es determinar que el rango de la función r y el rango de la función h

son disjuntos. En efecto,

$$\begin{aligned}
x \in (-\infty, -2] \cup [6, \infty) &\iff \quad x \leq -2 \quad \text{o} \quad 6 \leq x \\
&\iff \frac{1}{2}x + 1 \leq 0 \quad \text{o} \quad 4 \leq \frac{1}{2}x + 1 \\
&\iff p(x) \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)
\end{aligned}$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned}
x \in [1, 3] &\iff 1 \leq x \leq 3 \iff 0 \leq x - 1 \leq 2 \\
&\implies 0 \leq (x-1)^2 \leq 4 \iff 0 \geq -(x-1)^2 \geq -4 \\
&\iff 4 \geq 4 - (x-1)^2 \geq 0 \iff 2 \geq \sqrt{4 - (x-1)^2} \geq 0 \\
&\iff 3 \geq 1 + \sqrt{4 - (x-1)^2} \geq 1 \iff h(x) \in [1, 3]
\end{aligned}$$

Así, como

$$\Big((-\infty, 0] \cup [4, \infty) \Big) \cap [1, 3] = \emptyset$$

se tiene entonces que $p(x)$ no pertenece al rango de la función h siempre que $x \in (-\infty, -2] \cup [6, \infty)$.

Como la función f es inyectiva entonces ella es invertible. Las manipulaciones algebraicas

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \iff \quad 2y - 2 = x$$

y también

$$\begin{aligned}
y = 1 + \sqrt{4 - (x-1)^2} &\iff (y-1)^2 = 4 - (x-1)^2 \\
&\iff 4 - (y-1)^2 = (x-1)^2 \\
&\iff \sqrt{4 - (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2} = \big| x - 1 \big| \\
&\iff \sqrt{4 - (y-1)^2} = x - 1 \quad \text{pues} \quad x \in [1, 3] \\
&\iff 1 + \sqrt{4 - (y-1)^2} = x
\end{aligned}$$

junto con los cálculos anteriores, relacionados con el rango de la función, establecen que la expresión de la función inversa f^{-1} viene dada por

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 2y-2 & , \text{ si } y \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty) \\ 1+\sqrt{4-(y-1)^2} & , \text{ si } y \in [1, 3] \end{cases}$$

Como $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$, se tiene que $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ pertenece al dominio de la función f, que es igual a $(-\infty, -2] \cup [1, 3] \cup [6, \infty)$, únicamente cuando $g(x) = 1$. Así,

- El dominio de la función $f \circ g$ es $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$ ya que es el conjunto de valores para los cuales el seno vale 1.
- El rango de la función $f \circ g$ es $\{3\}$ pues $f(1) = 3$.

Finalmente, determinaremos el dominio de la composición $\big(f \circ r\big)(x)$ encontrando cuáles valores de x pertenecientes al dominio de la función r son tales que $r(x)$ pertenece al dominio de la función f. El dominio de la función $r(x) = 1+\sqrt{11x+3}$ es el conjunto $\left[-\frac{3}{11}, \infty\right)$ y su rango es el conjunto $[1, \infty)$. Luego,

$$r(x) \in (-\infty, -2] \iff x \in \emptyset$$

$$\begin{aligned} r(x) \in [1, 3] &\iff 1 \leq 1+\sqrt{11x+3} \leq 3 \\ &\iff 0 \leq \sqrt{11x+3} \leq 2 \\ &\iff 0 \leq 11x+3 \leq 4 \quad \text{pues } x \in \left[-\tfrac{3}{11}, \infty\right) \\ &\iff -\frac{3}{11} \leq x \leq \frac{1}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(x) \in [6, \infty) &\iff 6 \leq 1+\sqrt{11x+3} \iff 5 \leq \sqrt{11x+3} \\ &\iff 25 \leq 11x+3 \iff 2 \leq x \end{aligned}$$

establece que

$$\big(f \circ r\big)(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{4-\big(r(x)-1\big)^2} & , \text{ si } x \in \left[-\frac{3}{11}, \frac{1}{11}\right] \\ \frac{1}{2}r(x)+1 & , \text{ si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

la cual se reescribe como

$$\big(f\circ r\big)(x)=\begin{cases}1+\sqrt{1-11x} & \text{, si } x\in\big[-\frac{3}{11},\frac{1}{11}\big]\\ \frac{1}{2}\big(3+\sqrt{11x+3}\big) & \text{, si } x\in[2,\infty)\end{cases}$$

Pregunta 3. Dada la ecuación de la circunferencia

$$x^2+y^2-4x+6y-12=0$$

Halle:

a) (3 ptos.) El centro y el radio de la circunferencia.

b) (3 ptos.) La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $P(5,1)$.

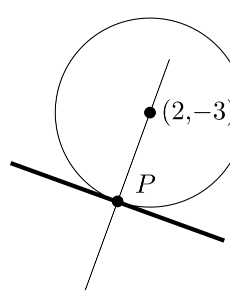
Solución: Haciendo completación de cuadrados

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x+6y-12 &= 0\\ x^2-4x+y^2+6y &= 12\\ \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}+\underbrace{y^2+6y+9}_{(y+3)^2} &= 12+4+9\\ (x-2)^2 \;+\; (y+3)^2 &= 25 \;=\; 5^2\end{aligned}$$

obtenemos una ecuación para la circunferencia, equivalente a la anteior, de la cual se desprende que su centro es el punto $(2,-3)$ y su radio vale 5.

La recta tangente a la circunferencia en el punto $P(5,1)$ es perpendicular a la recta que pasa por los puntos P y el centro de la circunferencia, cuya pendiente es

$$\frac{1-(-3)}{5-2}={}^{4}\!/_{3}$$



Así, la pendiente de la recta tangente es $-{}^{3}\!/_{4}$. Conociendo que la recta deseada pasa por el punto $P(5,1)$ y su pendiente vale $-{}^{3}\!/_{4}$, su ecuación viene dada por

$$3x+4y-19=0$$

pues $\dfrac{y-1}{x-5}=-{}^{3}\!/_{4}$.